

CATTENOY Fanny
CHABIN Bleuenn
DUFLOT Adeline
LE CLAIRE Laurianne

Terminale S2

La Structure Fractale des Poumons

2004/2005

Sommaire

I)	Généralité sur les fractales	page 1
A.	Historique	page 1
B.	Mathématisation des fractales	page 1
1)	Mandelbrot	page 2
2)	Von Koch	page 3
3)	Images de fractales	page 7
II)	Relation entre les fractales et les poumons	page 7
A.	Modélisation des poumons	page 7
B.	La dimension fractale des poumons	page 9
II)	Fonctionnement général des poumons	page 10
A.	Description générale	page 10
1)	La respiration	page 10
2)	L'échange gazeux	page 11
3)	Anatomie détaillée du système respiratoire	page 11
B.	Apport de la structure fractale	page 13
1)	l'utilité des fractales sur le volume pulmonaire	page 14
2)	l'utilité des fractales sur la robustesse des poumons	page 14

Dans le cadre de ce TPE, regroupant les mathématiques et les sciences de la vie de la Terre, nous étudierons les fractales dans les poumons afin d'illustrer le thème « Formes et Structures ».

Il s'agira de voir comment les fractales favorisent le fonctionnement des poumons.

Plus précisément, cette problématique nous permettra de répondre aux questions suivantes : Que sont les fractales ? Quand ont-elles été découvertes ? Pourquoi sont-elles dans les poumons ? Pour cela, nous examinerons, tout d'abord, l'histoire des fractales et leur mathématisation puis la relation entre les fractales et les poumons, enfin les conséquences de la structure fractale dans les poumons.

I Généralités sur les fractales

A. Historique

Les mathématiciens du 19^{ème} siècle et du début du 20^{ème} siècle, qui s'interrogeaient sur la notion de dérivabilité avaient construit de nombreux contre-exemples aux règles habituelles. Ils ont trouvé des courbes continues qui ne possédaient des tangentes en aucun point.

Tout d'abord, c'est Georg Cantor qui multiplie « les monstres mathématiques » : ces travaux remettent en question la notion de fonction.

Ensuite, c'est Helge von Koch en 1904 qui découvrit le flocon de von Koch qui le rendit célèbre. Mais les fractales ne prirent un statut important que dans les années 70 grâce au mathématicien français Benoît Mandelbrot qui a généralisé les travaux de Pierre Fatou et de Gaston Maurice Julia sur les itérations de fonctions complexes. Il montra l'intérêt de l'introduction d'une fonction non entière pour caractériser des figures géométriques « ayant la propriété de pouvoir être décomposées en partie de telle façon que chaque partie soit une image réduite. »

A partir de ces travaux, il écrivit un livre : « Les objets fractals » qui le rendirent célèbre et mirent en avant cette nouvelle structure et ses applications.

On peut noter que le terme de fractal a été inventé par Mandelbrot à partir du mot latin *fractus* qui signifie brisé.

B. Mathématisation des fractales

Il est possible de former des courbes fractales à partir d'une construction géométrique. Ces courbes se forment grâce à un initiateur et un générateur : l'initiateur est le point de départ de la fractale, on génère ensuite une modification, un motif sur l'initiateur. La formation de la courbe fractale consiste à utiliser ce même générateur sur chaque segment de la figure. Une étape de construction de la courbe est appelée « itération » car on effectue en réalité toujours la même opération sur la courbe.

1) Mandelbrot

Il existe un ensemble de courbes intéressantes, générées par une formule dite « algorithme mathématique », composées de nombres réels et de nombres complexes. Pour ce faire :

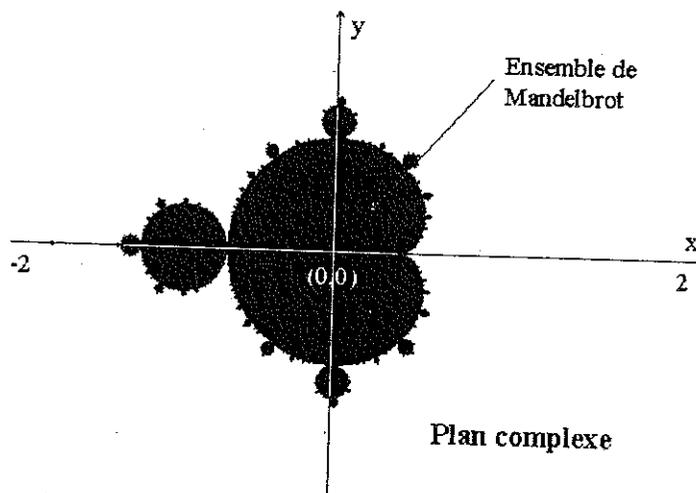
- On associe à chaque point de l'image des coordonnées faites de deux nombres réels mais qui constituent un complexe.
- On élève ensuite ce nombre au carré et on lui ajoute une constante.
- On répète l'opération précédente à l'infini, cette opération est une itération.

Cette méthode a été utilisée par Benoît Mandelbrot et par Gaston Maurice Julia, c'est pourquoi on appelle les fractales constituées par cet algorithme « ensemble de Mandelbrot » et « ensemble de Julia ».

L'algorithme de l'ensemble de Mandelbrot est la suite z_n telle que suite $z_{n+1}=z_n^2+A$ avec $z_0=0$ et $A=a+ib$ l'affixe du point. Tous les points pour lesquels la suite est bornée vont constituer l'ensemble de Mandelbrot.

Si le module de z_n est supérieur à 2 la suite va diverger. On en déduit que l'ensemble de Mandelbrot est forcément inclus dans le cercle de rayon 2 et de centre $(0,0)$.

Ceci permet de dire, comme nous l'avons vu précédemment, que l'aire de cet ensemble est finie alors que le périmètre lui est infini, ce qui est caractéristique d'un objet fractal. C'est donc à la frontière de cet ensemble que tout se passe et c'est là qu'il va falloir agrandir pour pouvoir calculer des images intéressantes.



l'ensemble de Mandelbrot dans le plan complexe

Ce type de fractale est bien plus complexe à générer que s'il s'agissait d'itérer à partir d'une figure géométrique. Par conséquent, les logiciels sont plus compliqués. Parmi les logiciels que l'on peut trouver afin de générer des fractales, on compte GECIF, Ultrafractal, Fractint, et d'autres...

Suivant les couleurs que l'on associe (par rapport à la vitesse de convergence d'une suite), on peut réaliser des fractales très esthétiques.

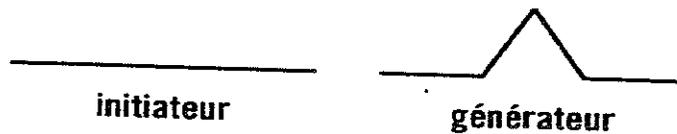
Il existe un second type de fractales qui nous intéresse plus particulièrement pour ce TPE. Ce sont des fractales d'homothétie interne. La plus connue de ces courbes est celle qui leur a

donné naissance : le flocon de Von Koch. Elle a permis de concrétiser la notion de fractales par une figure géométrique que nous étudierons en détail.

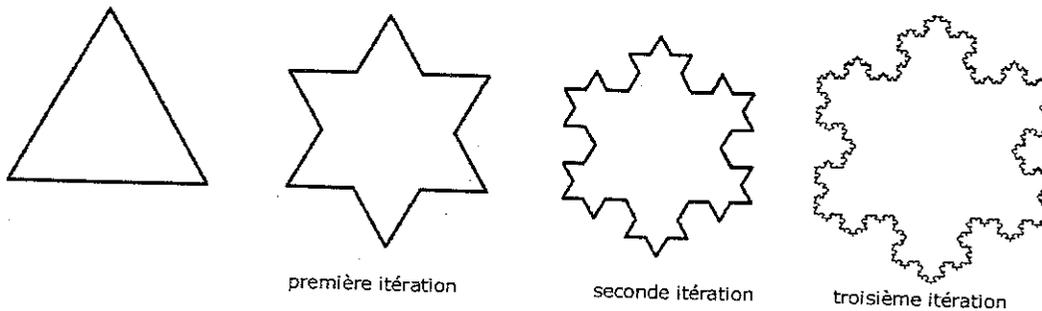
2) Von Koch

a) la formation de la courbe de Von Koch

La courbe de Von Koch est également appelée « flocon de Von Koch » en raison de sa forme similaire à celle d'un flocon de neige. Voici l'initiateur et le générateur de cette courbe :



Le segment d'initiation a ici été divisé en trois segments de tailles égales. Le segment central est modifié pour former un triangle dont les cotés ont même mesure que les segments précédents. Si on prend un triangle comme point de départ, le flocon de Von Koch se forme ainsi :



Afin de mieux comprendre comment il est possible de recréer de telles formes à l'infini, nous allons étudier l'itération du flocon de Von Koch :



figure 1

figure 2

A partir de formules simples, on peut trouver les points C, D, E en fonction de A et de B.

$$\overline{AC} = \frac{1}{3} \overline{AB} \quad \text{et} \quad \overline{AD} = 2 \overline{AC}$$

$$x_C = \frac{1}{3}(x_B - x_A) + x_A \quad ; \quad y_C = \frac{1}{3}(y_B - y_A) + y_A$$

$$x_D = 2x_C - x_A \quad ; \quad y_D = 2y_C - y_A$$

Mais pour le point E, il est nécessaire d'introduire une rotation d'origine C et d'angle $\pi/3$ que l'on note $\mathfrak{R}(\pi/3)$

\overline{CE} est l'image de \overline{CD} par la rotation $\mathfrak{R}(C, \frac{\pi}{3})$

$$\overline{CE} = \begin{pmatrix} (x_D - x_C) \cos(\frac{\pi}{3}) - (y_D - y_C) \sin(\frac{\pi}{3}) \\ (x_D - x_C) \sin(\frac{\pi}{3}) + (y_D - y_C) \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

Donc

$$x_E = (x_D - x_C) \cos(\frac{\pi}{3}) - (y_D - y_C) \sin(\frac{\pi}{3}) + x_C$$

$$y_E = (x_D - x_C) \sin(\frac{\pi}{3}) + (y_D - y_C) \cos(\frac{\pi}{3}) + y_C$$

Cette formule permet ensuite de créer toutes les constructions du flocon. Toutefois, il est souvent utile de se servir d'un tableur (notamment EXCEL) étant donné que les itérations deviennent rapidement trop complexes.

b) étude algébrique du flocon

Il est aussi intéressant de calculer la dimension de cette figure. Une figure fractale n'a pas de dimension « classique » et entière. Une droite est de dimension $D = 1$, un plan est de dimension $D = 2$, et un volume est de dimension $D = 3$. de telles dimensions se calculent à partir de la formule suivante :

Si D est la dimension, k le nombre de parties égales en lesquelles l'objet initial peut être divisé, et r le facteur de réduction de l'objet, on peut établir la formule $D = \ln(k)/\ln(r)$

Concrètement, ici nous avons $k = 4$ et $r = 3$ puisque à partir de 3 portions de segments égaux, nous formons 4 segments de même mesure.

$D = \ln(4)/\ln(3) = 1,2618\dots$ la dimension du flocon est donc comprise entre deux dimensions.

De plus, on peut également constater une incohérence entre l'aire et le périmètre du flocon.

L'intérêt du Flocon de Von Koch réside dans ses particularités de limites pour le périmètre et pour l'aire. En effet, il est possible de démontrer que le périmètre du flocon augmente à chaque itération tandis que son aire est limitée.

Périmètre du Flocon :

Soit (C_n) la suite représentant le nombre de côtés pour chaque figure avec $C_1=3$. On remarque que pour construire la figure suivante, il faut multiplier ce nombre de côtés par quatre. Ainsi $C_{n+1}=4C_n$, (C_n) est donc une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $C_1=3$, d'où $C_n=3 \times (4)^{n-1}$.

Soit (ℓ_n) la suite définissant la longueur des côtés à chaque itération avec $\ell_1=1$. Pour former la figure suivante, il faut diviser cette longueur par trois selon la formule $\ell_{n+1}=\frac{1}{3}\ell_n$. Ici encore (ℓ_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\ell_1=1$, d'où $\ell_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Le périmètre se calcule suivant la formule $p_n=C_n \times \ell_n$. Pour tout entier n on a donc $p_n=3 \times (4)^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

(p_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme $p_1=3$

D'après les règles sur les suites géométriques, comme $\frac{4}{3} > 1$, (p_n) est strictement croissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$$

Aire du Flocon :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a dont la hauteur passant par A a pour pied H. D'après le théorème de Pythagore on a la relation suivante :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Pour le flocon de Von Koch (triangle équilatéral) si on pose que la longueur initiale d'un côté est égale à 1 on a $A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Si l'on considère le flocon, pour trouver l'aire de la figure deux, il faut ajouter à l'aire initiale l'aire de 3 petits triangles supplémentaires dont la longueur du côté est ℓ_{n+1} , son aire est donc de $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \ell_{n+1} \times \ell_{n+1}$

De même, pour la figure suivante, il faut encore ajouter l'aires de plus petits triangles, et ainsi de suite. C'est pourquoi on peut définir l'aire comme une suite telle que

$$A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\ell_{n+1})^2 \times 3 \times (4)^{n-1} = A_n + \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \times 3 \times (4)^{n-1} \text{ car on sait que } \ell_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ donc}$$

$$A_{n+1} = A_n + \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{(4)^n}{4} = A_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

On en déduit que pour tout $n \geq 1$ $A_n = A_{n-1} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = A_{n-2} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \dots$

En décomposant ainsi de suite A_n, A_{n-1}, A_{n-2} etc... on va démontrer que.

$$A_n = A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right]$$

Soit P_n la propriété suivante $A_n = A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right]$ pour tout $n \geq 2$

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie quelque soit n supérieur ou égal à 2.

Si $n=2$ on a $A_2 = A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\left(\frac{4}{9}\right)^{2-1} \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ en effet comme $A_{n+1} = A_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$ on a

$$A_2 = A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ donc } P_2 \text{ est vraie.}$$

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à deux, fixé. Supposons que P_k soit vraie et démontrons que sous cette hypothèse P_{k+1} est vraie également.

$$A_k = A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{k-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \right]$$

$$\Leftrightarrow A_k + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^k = A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{k-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \right] + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow A_{k+1} = A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{k-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^k \right] \text{ donc } P_{k+1} \text{ est vérifiée.}$$

Ainsi, on a démontré par le principe de récurrence que pour tout entier $n \geq 2$

$$A_n = A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right]$$

Or on sait que $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, on peut donc dire que

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right] = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right] = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right]$$

De plus $1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme 1.

$$\text{Ainsi } 1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right]$$

Nous avons donc prouvé que $A_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{9}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right]$, pour tout entier naturel $n \geq 1$, cette formule étant vraie également pour $n=1$.

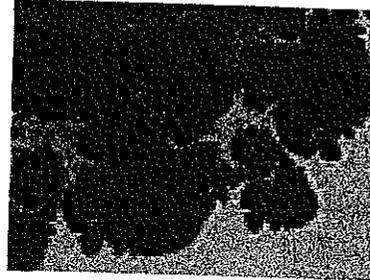
Il faut encore étudier la limite de cette suite. $\frac{4}{9} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{9}{5} = \frac{\sqrt{3}}{16} \times \left(1 + \frac{27}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16} \times \frac{32}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ donc une limite finie.

On peut donc bien dire que le flocon de Von Koch est une figure dont le périmètre est sans cesse en expansion tandis que son aire est limitée. Nous verrons l'intérêt de cette structure au sein même des poumons.

3) Images de fractales

Voici quelques exemples de remarquables fractales réalisées avec le logiciel GECIF :



On peut donc dire que les objets fractals sont des éléments particuliers. Suivant une itération qui se reproduit à l'infini, on peut obtenir à partir d'un espace fini une surface infinie. Ces éléments ne se limitent toutefois pas au simple domaine mathématique. Nous pouvons trouver des fractales dans la nature, et bien plus souvent que ce que l'on pense. En effet, les fractales constituent la structure de certaines fougères (polypodes), de la radula d'un escargot, des choux romanesco, des choux-fleurs, de la cote Bretonne et de nombreuses parties du corps humain telles que les poumons, les capillaires sanguins ou encore les neurones.

Pour comprendre ce qui lie les fractales et les éléments de la nature, nous étudierons le cas particulier du poumon et de ses alvéoles pulmonaires.

II) Relation entre les fractales et les poumons

A. Modélisation des poumons

Les bronches sont des tubes creux qui se ramifient comme les branches d'un arbre et qui permettent de distribuer l'air de façon homogène aux deux poumons. La trachée qui amène l'air au poumon descend à l'intérieur du thorax puis se divise ensuite en deux bronches principales, une pour chaque poumon. Les bronches se divisent ensuite environ 23 fois pour amener l'air jusqu'aux alvéoles pulmonaires. On peut donc parler de structure fractale. Il est possible de modéliser mathématiquement la structure fractale du poumon en utilisant une des variantes de la courbe de Von Koch.

La construction de cette courbe repose sur le principe de base ci-dessous :



En sachant que $AC = CE = ED = DB$ et que $(CD, CE) = \alpha$

L'obtention des points C, E, D à partir des points A et B repose sur quelques formules simples détaillées ci-dessous :

$$AC = \frac{5}{11} AB \text{ et } AD = \frac{6}{5} AC$$

$$x_C = \frac{5}{11}(x_B - x_A) + x_A \quad \text{et} \quad y_C = \frac{5}{11}(y_B - y_A) + y_A$$

$$x_D = \frac{6}{5}(x_C - x_A) + x_A \quad \text{et} \quad y_D = \frac{6}{5}(y_C - y_A) + y_A$$

On veut maintenant exprimer CE en fonction de CD afin de déterminer les coordonnées du point E pour pouvoir tracer cette courbe fractale.

$$CD = AD - AC = \frac{6}{5}AC - AC = \frac{1}{5}AC$$

Or en longueur $AC = CE$ ce qui permet de dire que $CE = 5 CD$

On a donc que CE est l'image de $5CD$ par la rotation $\mathcal{R}(C, \alpha)$

On peut donc maintenant établir les coordonnées du point E :

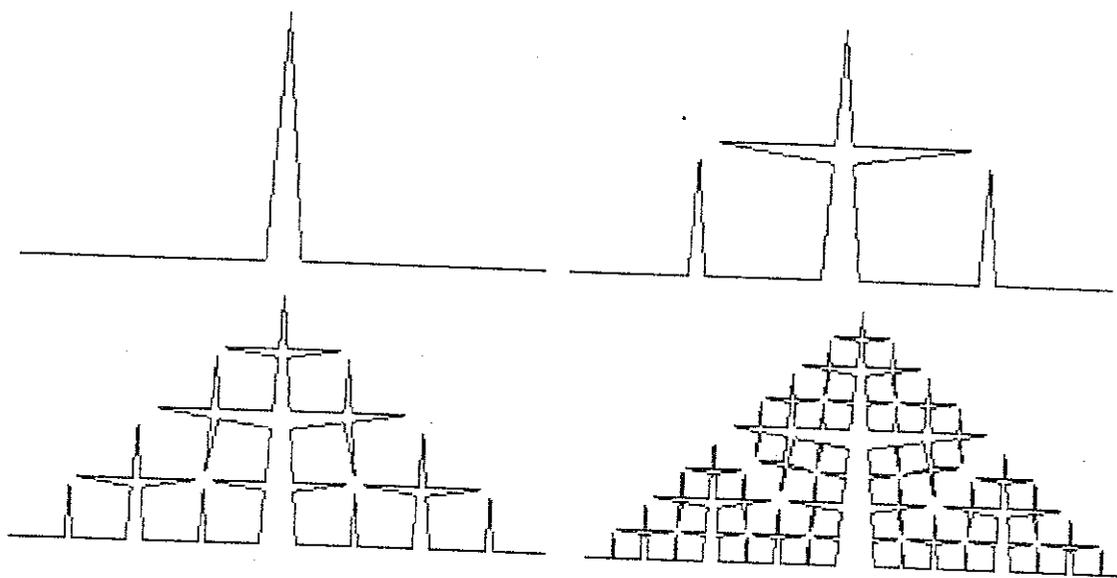
$$x_E = 5 [(x_D - x_C) \cos \alpha - (y_D - y_C) \sin \alpha + x_C]$$

$$y_E = 5 [(x_D - x_C) \sin \alpha + (y_D - y_C) \cos \alpha + y_C]$$

Il est possible de donner une valeur approchée de α . En effet $CD = \frac{1}{11}$ donc $\frac{1}{2} CD = \frac{1}{22}$

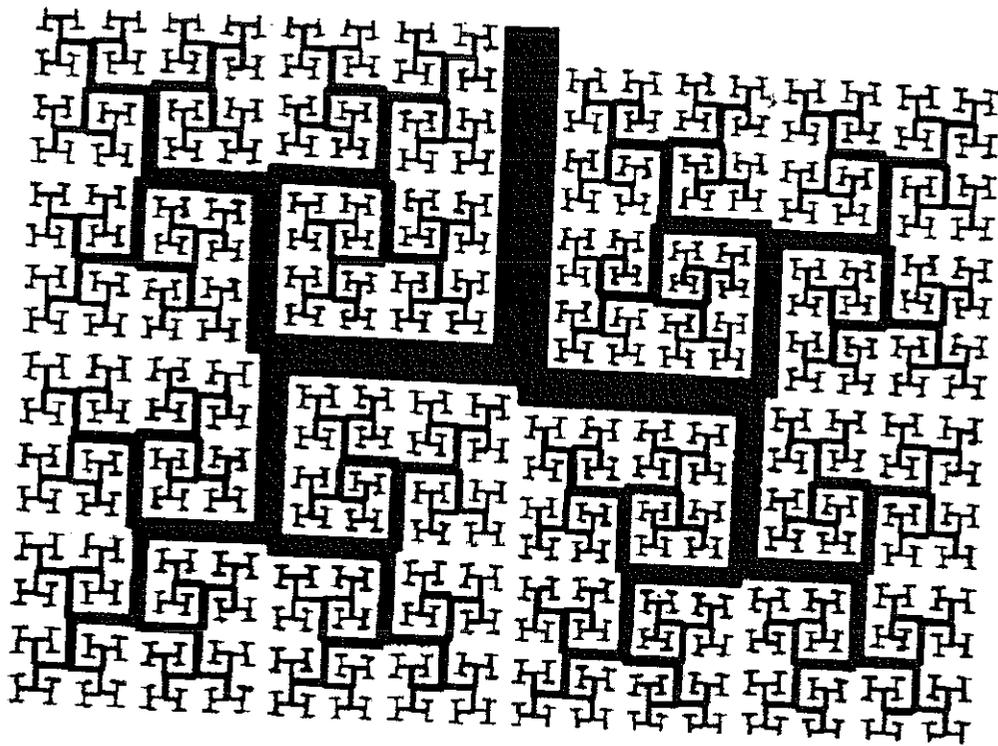
On peut alors appliquer la formule trigonométrique $\cos\alpha = \frac{CD}{CE} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{11}} = \frac{1}{10}$. A la calculatrice, une valeur approchée en radian de α est $\alpha \approx 1,47$ rad

C'est ainsi qu'il est possible de réaliser les différentes itérations de cette fractale représentant la structure du poumon :



La quatrième itération correspond alors à la formation des sacs alvéolaires composés d'alvéoles pulmonaires servant aux échanges gazeux.

B. Dimension fractale dans les poumons



L'artère principale se divise en deux, puis les artères suivantes en deux aussi et ce 23 fois. On obtient au final environ 223 séparations d'artères soit 8 000 000 d'artérioles.

Les alvéoles ont un diamètre $I=0.2\text{mm}$. Pour les calculs, nous utiliserons un cube de côté I pour représenter une alvéole. Sur ce cube, cinq faces seront allouées à la surface d'échange tandis que la dernière face ne sera pas utilisable car il faut que l'air pénètre dans l'alvéole. On obtient donc une surface d'échange par alvéole de $5 \times (0.2)^2$ soit $2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$. D'après les recherches on sait qu'il y a environ 2×10^{16} acinus soit 60000 et que la surface totale des poumons est de 140m^2 . On peut alors calculer la surface de chaque acinus :

$$S = \frac{(140 \times (10)^4)}{60000} = 25 \text{ cm}^2, \text{ ou encore son volume sachant que la capacité pulmonaire d'un homme}$$

$$\text{est d'environ 5 litres : } V = \frac{(5 \times (10)^3)}{60000} = 0,1 \text{ cm}^3. \text{ Cette valeur est approximativement égale à}$$

$$0,125 \text{ cm}^3. \text{ On obtient donc pour un acinus une taille } L \text{ d'environ } L = \sqrt[3]{0,125} = 5 \text{ mm. Pour}$$

chaque acinus, on empile les alvéoles sur une fractale de dimension D pour obtenir une surface totale par acinus d'environ 25 cm^2 . Nous pouvons alors calculer la dimension fractale.

La formule est : $D = \frac{\ln(n)}{\ln(\frac{L}{I})}$, n étant le nombre de petits cubes.

Ce qui donne ici :

$$\left(\frac{L}{I}\right) = \frac{5 \text{ mm}}{0,2 \text{ mm}}$$

n est le nombre de petits cubes de surface $2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$ tel que la surface par acinus soit 25 cm^2

$$n = \frac{25}{2 \times (10)^{-3}} = 12500$$

$$\text{On obtient donc } D = \frac{\ln(12500)}{\ln(25)} \text{ soit environ } 2.93$$

La dimension fractale du poumon est donc bien comprise entre deux dimensions entières. $0 \leq 2.93 \leq 3$. Nous verrons par la suite que cette dimension particulière confère aux poumons de grandes propriétés.

III) Fonctionnement général des poumons

A. Description générale

Les poumons peuvent être représentés comme deux sacs roses spongieux qui s'étendent avec la contraction du diaphragme pour permettre l'admission de l'air. Les poumons constituent le principal organe du système respiratoire. Les poumons sont divisés en une moitié droite et une moitié gauche qui comprennent respectivement des lobes. En tout, les poumons sont constitués de cinq lobes : trois du côté droit et deux du côté gauche et sont recouverts d'une fine membrane que l'on nomme la plèvre. Le poumon droit est plus volumineux que le poumon gauche bien que le cœur prenne un peu d'espace du côté gauche. Les poumons sont composés de bronchioles qui transportent l'air à l'unité fonctionnelle du poumon : l'alvéole.

1) La respiration

La respiration est un phénomène automatique. Le rythme respiratoire d'un adulte moyen au repos est de seize respirations par minute. L'air inspiré descend dans la trachée jusqu'aux bronches, qui se ramifient pour pénétrer dans le poumon droit ou gauche. Les bronches se ramifient elles-mêmes en plusieurs bronchioles, qui se divisent en une demi-douzaine de canaux alvéolaires, qui sont d'étroits conduits s'ouvrant dans les sacs alvéolaires.

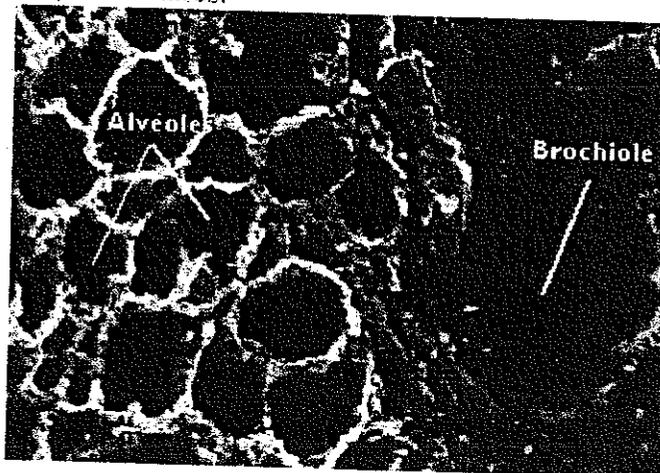
La respiration est caractérisée par un certain nombre de volumes respiratoires qui dépendent de l'âge, la taille et le sexe du sujet. Le fonctionnement mécanique du poumon est commandé essentiellement par le mouvement du diaphragme qui assure la dilatation simultanée de 30 000 acini.

2) L'échange gazeux

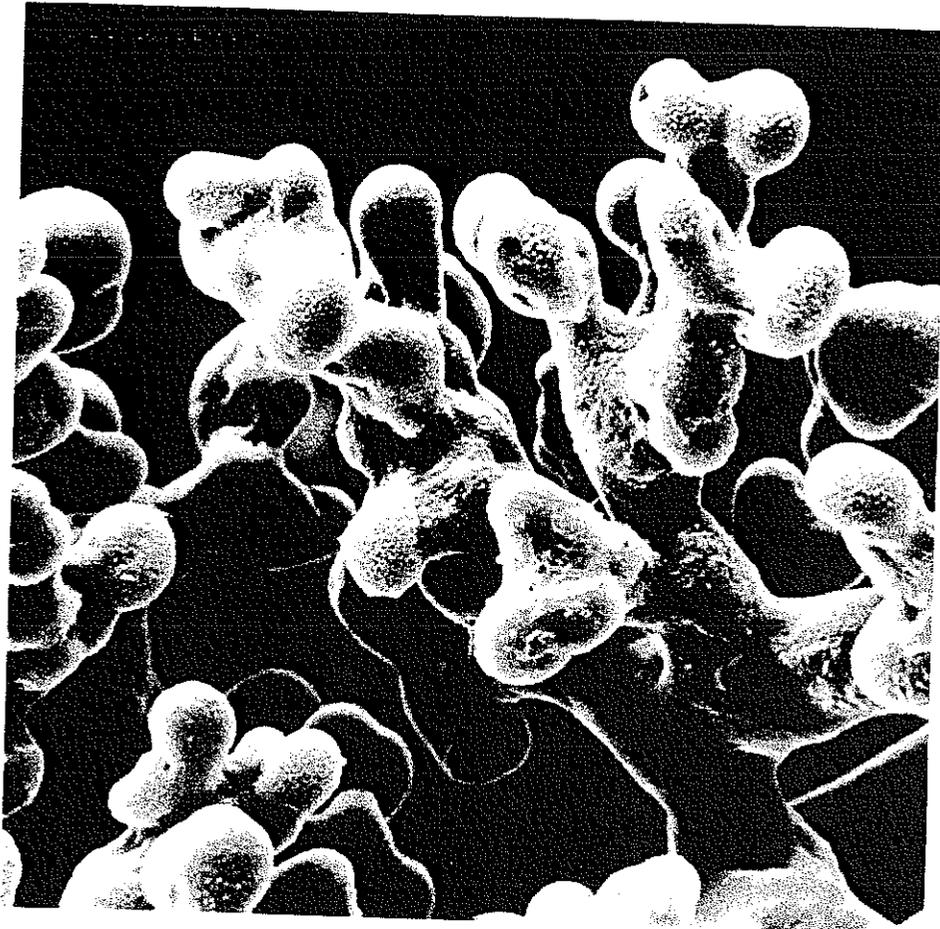
Les cellules et les tissus du corps ont besoin d'une alimentation constante en oxygène. A chaque inspiration, de l'oxygène rentre dans les poumons. L'oxygène est absorbé par le sang et passe à travers les parois capillaires pour alimenter les cellules des tissus et fabriquer de l'énergie. En même temps, le dioxyde de carbone est éliminé de ces tissus et transporté par le sang. Le dioxyde de carbone est expulsé des poumons lors de l'expiration. Cet échange intervient dans des millions d'alvéoles pulmonaires. Il a lieu grâce à la circulation qui se déroule entre le cœur droit, le poumon et le cœur gauche. Le sang diffuse le dioxyde de carbone à travers la paroi membraneuse des alvéoles et prélève l'oxygène de l'air. Le sang régénéré (riche en oxygène) est alors envoyé aux précapillaires et aux veinules qui sont tributaires de la veine pulmonaire. Cette veine renvoie le sang régénéré vers le cœur pour qu'il soit ensuite distribué à tout l'organisme pour alimenter ses cellules.

3) Anatomie détaillée du système respiratoire

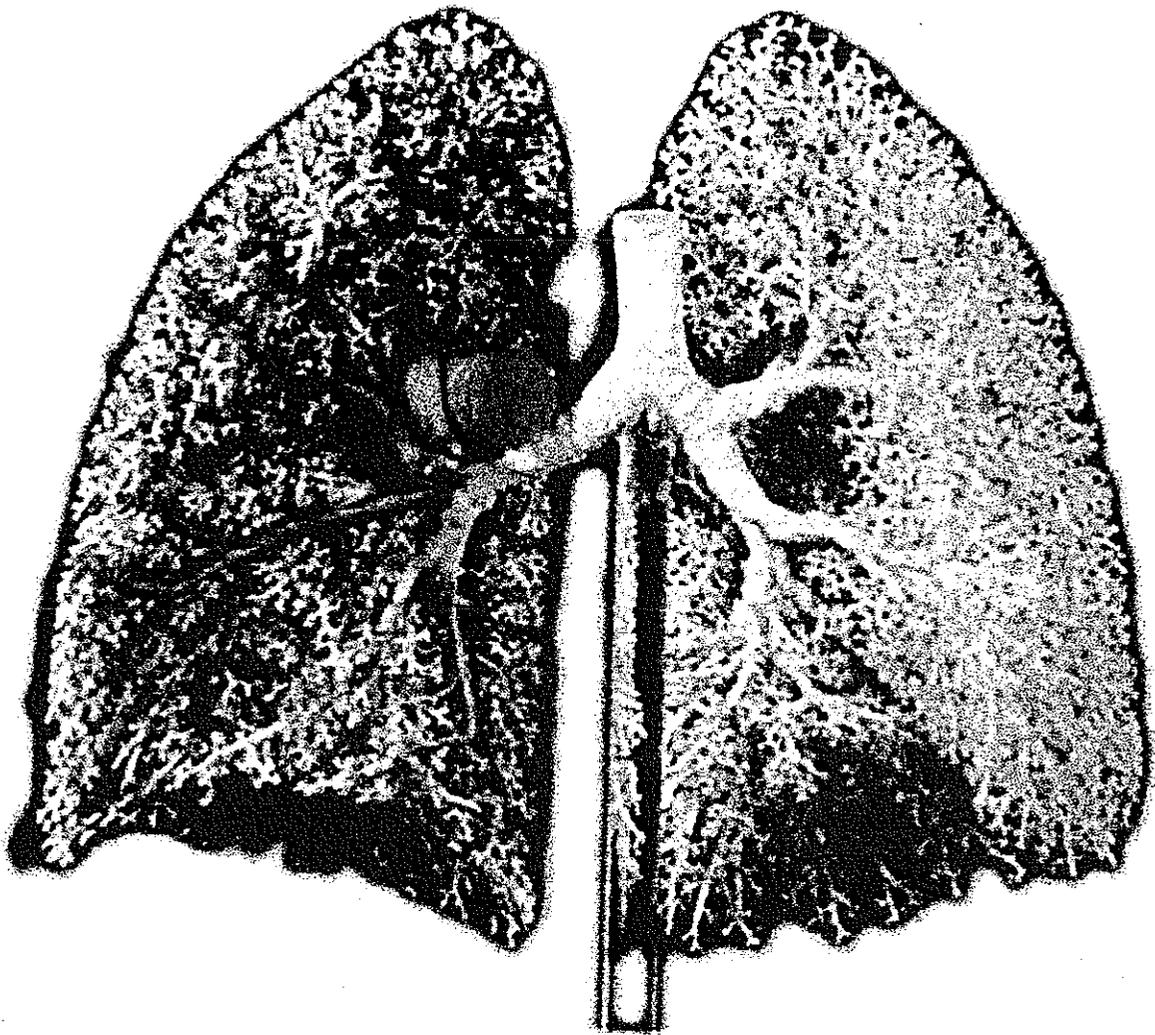
- La plèvre est constituée de deux feuillets, l'un accolé au niveau pulmonaire, le feuillet viscéral, et l'autre accolé à la paroi thoracique, le feuillet pariétal. La cavité pleurale est imprégnée d'une mince couche de liquide qui maintient les deux feuillets accolés et assure un glissement de ces feuillets sans frottements. La plèvre permet ainsi de développer le poumon lors de l'expansion de la cage thoracique au moment de l'inspiration.
- Les bronches sont les conduits qui transportent l'air de la trachée aux lobes inférieurs des poumons d'où l'oxygène peut passer dans le sang au niveau des alvéoles pulmonaires. Les bronches se divisent en plus petits passages appelés bronchioles formant un réseau de ramifications qui s'étend dans l'ensemble du tissu spongieux.
- Les bronchioles sont donc les conduits d'airs intermédiaires des poumons qui proviennent de la division des bronches. Chaque bronchiole respiratoire se subdivise en canaux qui débouchent sur des sacs alvéolaires.



- Les alvéoles pulmonaires sont des sacs minuscules situés aux extrémités de l'arbre bronchique qui forment le tissu pulmonaire. Le canal alvéolaire lui-même se ramifie en sacs alvéolaires. Le sac alvéolaire qui regroupe des alvéoles (une dizaine ou plus) ressemble à une grappe de raisin. Ces alvéoles sont de petites sphères de 0.1 millimètres tapissées par une membrane très riche en vaisseaux. Cette membrane, qui sépare l'alvéole du réseau capillaire où circule le sang, est très mince (0.3 micromètres de diamètre) et semi-perméable ce qui permet à l'oxygène de passer de l'air aux cellules sanguines transitant dans les capillaires. Les alvéoles sont particulièrement sensibles aux infections car elles constituent un environnement chaud et humide propice à la prolifération des virus et des bactéries. Les alvéoles se remplissent d'air au cours de l'inspiration puis se vident au cours de l'expiration. Ces mouvements se produisent grâce aux muscles respiratoires.



- L'inspiration ne pourrait avoir lieu sans l'intervention des muscles respiratoires commandés par des centres nerveux respiratoires. Les muscles respiratoires doivent s'opposer à la résistance élastique du poumon, tendant naturellement à se rétracter sur lui-même. Plusieurs muscles sont pour cela mis à contribution : le diaphragme, les scalènes et les muscles intercostaux ainsi que les sterno-cléido-mastoïdiens. Le diaphragme, large muscle en forme de dôme, sépare la cavité abdominale de la cavité thoracique. Sa contraction provoque une diminution de sa courbure jusqu'à dix centimètres. Les autres muscles ne se contractent qu'en cas de débit ventilatoire important. L'expiration est naturellement passive de par l'élasticité naturelle des poumons. Cependant, une expiration forcée mettra en jeu les muscles abdominaux et les muscles intercostaux externes.



B. Apport de la structure fractale

Précédemment, nous avons vu que la dimension fractale des poumons était comprise entre deux et trois, et plus proche de trois. Par ailleurs, on peut constater que les poumons présentent une structure arborescente.

Chez le fœtus, se forme d'abord le tronc qui deviendra la trachée, qui se sépare en deux bourgeons puis l'opération se réitère. Les bronches et les bronchioles forment un arbre bronchique. Par ailleurs, la division a lieu dans une direction quelconque ce qui permet au réseau des bronches d'amener de l'air dans le poumon. Lors de la formation même des poumons, on constate que l'itération fractale se manifeste. Cette structure fractale est utile aux poumons à plusieurs niveaux :

- 1) l'utilité des fractales sur le volume pulmonaire

Lors de recherche, on a remarqué que les fractales étaient nécessaires au corps humain. Effectivement, ce sont les poumons qui assurent les échanges par l'intermédiaire d'une surface dont l'espace doit être le plus grand possible mais dans un lieu fermé qui est la cage thoracique d'où un volume limité.

Si l'on utilisait la géométrie d'une sphère, par exemple, pour augmenter la surface, il faudrait augmenter le rayon. Or les poumons se trouvent dans un milieu fermé. En comptant la surface d'échange d'un être humain, on trouve approximativement 100 m². Pour le cas d'une sphère, le poumon devrait mesurer 2,8 mètres de rayon !

La surface de nos poumons est donc infime par rapport à la surface d'échanges gazeux qu'ils permettent. Les fractales permettent ainsi aux êtres vivants et notamment humains de posséder un système respiratoire performant sans être excessivement volumineux.

2) l'utilité des fractales sur la robustesse des poumons

On peut aussi souligner une utilité de la présence des fractales dans les poumons. La structure fractale permet au corps humain d'être robuste, car même si une partie du système est amputé cela aura une conséquence infime. On peut citer l'exemple des fumeurs qui amputent un certain nombre de leurs alvéoles pulmonaires et qui, pourtant continuent à pouvoir respirer.

Cette propriété peut s'expliquer ici encore par des fractales d'homothétie interne. En effet, une bronche se divise en deux bronches. Le rapport des volumes des deux bronches formées sur celui de la bronche mère est $2h^3$. la résistance d'un tuyau obéit à une loi dite de Poiseuille selon laquelle la résistance d'un tuyau augmente avec sa longueur et inversement à la puissance 4 du diamètre. Ici, on admettra que la résistance d'une itération à un autre augmente d'un facteur $\frac{1}{2 \times (h)^3}$. Ainsi, plus h sera petit, plus la résistance augmentera rapidement tandis

que le volume n'augmentera que faiblement. Il existe une valeur pour laquelle la résistance est optimale. Celle-ci se détermine par la loi de Murray que nous ne détaillerons pas ici. Cette loi permet de trouver que la valeur pour laquelle h est optimale est $h = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,79$. Cette valeur

correspond, en dimension fractale, à une dimension exactement égale à 3. nous avons vu précédemment que la dimension fractale du poumon n'est pas égale exactement à 3 mais qu'elle en est proche. Avec une dimension fractale de 2,93, nous obtenons un rapport de 0,85 qui est donc proche de la valeur optimale. C'est pourquoi la résistance des poumons que nous possédons est remarquable.

Nous pouvons ajouter que ceci explique, entre autres, les différences de performance entre les individus. Le rapport d'homothétie peut légèrement varier d'un individu à l'autre lors de la formation des bronches pour le fœtus. Plus le rapport sera proche de la valeur optimum ; plus l'individu est performant. Les capacités respiratoires sont en fait en partie dues à des itérations mathématiques.

Conclusion

Les fractales sont une découverte récente grâce aux recherches effectuées par Mandelbrot et Julia. Leurs études nous ont permis de constater que la structure fractale représentait une surface infinie dans un espace fini.

Nous avons pu remarquer que les fractales dans les poumons permettent un meilleur échange respiratoire. En effet, l'échange gazeux est plus important du fait de la structure fractale qui confère aux poumons une très grande surface. Cependant, les fractales n'interviennent pas seulement dans les poumons. On les retrouve aussi dans de nombreux éléments naturels tels que les polypodes, les choux-fleurs, le réseau sanguin, l'intestin grêle... Les fractales sont encore méconnues, leur exploitation est encore complexe. Il reste de nombreux éléments à découvrir !